Sorozatok

1) Egy (a_n) számsorozatról a következőket tudjuk:
- a harmadik tagtól kezdve minden tag kiszámítható a következő rekurzív képlet segítségével: $a_n = a_{n-1} + 12a_{n-2}$;
- az a_1, a_2 és $a_3 - 9a_1$ ebben a sorrendben egy számtani sorozat 3 egymást követő tagja;
- az (a_n) sorozat első öt tagjának összege 682.

Mekkora ennek a számsorozatnak a hatodik tagja? (16 pont)

2) a) Legyen (a_n) egy mértani sorozat, melynek első tagja 5, hányadosa 3. Mennyi a valószínűsége, hogy ha ennek a mértani sorozatnak az első 110 tagjából egyet véletlenszerűen kiválasztunk, akkor a kiválasztott tag 11-gyel osztva 1 maradékot ad? (6 pont)

b) Legyen (b_n) egy számtani sorozat, amelynek az első tagja 5, és differenciája 3. Mekkora a valószínűsége, hogy ha ennek a számtani sorozatnak az első 110 tagjából egyen kiválasztunk, akkor a kiválasztott tag 11-gyel osztva 1 maradékot ad? (7 pont)

3) Egy pozitív tagokból álló mértani sorozat első három tagjának összege 26. Ha az első taghoz egyet, a másodikhoz hatot, a harmadikhoz hármat adunk, akkor ebben a sorrendben egy számtani sorozat első három tagját kapjuk. Adja meg ennek a számtani sorozatnak az első három tagját! (14 pont)

4) Legyen n pozitív egész. Adottak az alábbi sorozatok:

(a_n), ahol $a_n = (-2)^n + 2^n$;

(b_n), ahol $b_n = |n-23| - |n-10|$;

(c_n), ahol $c_n = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot n\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot n\right)\right)^2$.

Vizsgálja meg mindhárom sorozat korlátosság és monotonitás szempontjából! Válaszoljon mindhárom esetben, hogy a sorozat korlátos vagy nem, illetve monoton vagy nem! (Válaszát indokolja!) Korlátos esetben adjon meg egy alsó és egy felső korlátot! (16 pont)

5) Egy bank a „Gondoskodás” nevű megtakarítási formáját ajánlja újszülöttek családjának. A megtakarításra vállalkozó családok a gyermek születését követő év első banki napján számlát nyithatnak 100000 forint összeggel. Minden következő év első banki napján szintén 100000 forintot kell befizetniük a számlára. Az utolsó befizetés annak az évnek az első napján történhet, amely évben a gyermekük betölti 18. életévét. A bank év végén a számlán lévő összeg után évi 8%-os kamatot ad, amit a következő év első banki napján ír jóvá. A gyermek a 18. születésnapját követő év első banki napján férhet hozzá a számlához.

a) Mekkora összeg van ekkor a számlán? A válaszát egész forintra kerekítse! (8 pont)

A gyermek a 18. születésnapját követő év első banki napján felveheti a számláján lévő teljes összeget. Ha nem veszi, választhatja a következő lehetőséget is:
Hat éven keresztül minden év első banki napján azonos összeget vehet fel. Az első részletet a 18. születésnapját követő év első banki napján veheti fel. A

hatodik pénzfelvétellel a számla kiürül. Ha ezt a lehetőséget választja, akkor a bank –az első pénzfelvételtől számítva– minden év végén a számlán lévő összeg után évi 5%-os kamatot garantál, amit a következő év első banki napján jóváír.

b) Ebben az esetben mekkora összeget vehet fel alkalmanként? A válaszát egész forintra kerekítse! (8 pont)

6) Az (a_n) mértani és (b_n) számtani sorozatnak is 1 az első tagja, és mindkét sorozat hatodik tagja -1.

a) Sorolja fel mindkét sorozat első öt tagját! (4 pont)

b) Milyen pozitív egész n-ekre lesz a két sorozat első n tagjának összege ugyanakkora? (9 pont)

7) Egy mértani sorozat első három tagjának összege 91. A hatodik, hetedik és a nyolcadik tag összege 2912. Hány tizenhárom-jegyű tagja van a sorozatnak? (13 pont)

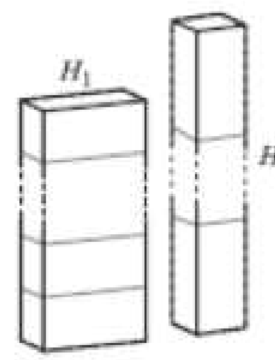
8) A főiskolások műveltségi vetélkedője a következő eredménnyel zárult. A versenyen induló négy csapatból a győztes csapat pontszáma $\frac{4}{3}$-szorosa a második helyen végzett csapat pontszámának. A negyedik, harmadik és második helyezett pontjainak száma egy mértani sorozat három egymást követő tagja, és a negyedik helyezettnek 25 pontja van. A négy csapat között kiosztott pontszámok összege 139.

a) Határozza meg az egyes csapatok által elért pontszámot! (8 pont)

Mind a négy csapatnak öt-öt tagja van. A vetélkedő után az induló csapatok tagjai között három egyforma értékű könyvutalványt sorsolnak ki (mindenki legfeljebb egy utalványt nyerhet).

b) Mekkora a valószínűsége annak, hogy az utalványokat három olyan főiskolás nyeri, akik mindhárman más-más csapat tagjai? (5 pont)

9) Két egyenes hasábot építünk, H_1-et és H_2-t. Az építéshez használt négyzetes oszlopok (négyzet alapú egyenes hasábok) egybevágók, magasságuk kétszer akkora, mint az alapélük. A H_1 hasáb építésekor a szomszédos négyzetes oszlopokat az oldallapjukkal illesztjük össze, a H_2 hasáb építésekor pedig a négyzet alaplapjukkal- az ábra szerint.



a) A H_1 és H_2 egyenes hasábok felszínének hányadosa $\frac{A_{H_1}}{A_{H_2}} = 0,8$. Hány négyzetes oszlopot használtunk az egyes hasábok építéséhez, ha H_1-et és H_2-t ugyanannyi négyzetes oszlopból építettük fel? (8 pont)

b) Igazolja, hogy $\left\{\frac{3n+2}{4n+1}\right\}(n \in \mathbb{N}^+)$ sorozat szigorú monoton csökkenő és korlátos! (8 pont)

10) a) Egy derékszögű háromszög oldalhosszai egy számtani sorozat egymást követő tagjai, a legrövidebb oldala 4 egység hosszú. Számítsa ki a háromszög másik két oldalának hosszát! (5 pont)

b) Egy háromszög oldalhosszai egy számtani sorozat egymást követő tagjai, a legrövidebb oldala 4 egység hosszú. Tudjuk, hogy a háromszög nem szabályos. Igazolja, hogy a háromszögnek nincs 60°-os szöge! (11 pont)

11) Egy növekvő számtani sorozat első három tagjának összege 60. Az első tagot 64-gyel növelve, a másik két tagot változatlanul hagyva, egy mértani sorozat első három tagjához jutunk. Mennyi a két sorozat első három tagja? (13 pont)

12) Péter nagypapája minden évben félretett némi pénzösszeget egy perselybe unokája számára. 5000 Ft-tal kezdte a takarékoskodást 1996. január 1-jén. Ezután minden év első napján hozzátett az addig összegyűlt összeghez, mégpedig az előző évben félretettnél 1000 Ft-tal többet. 2004. január 1-jén a nagypapa bele tette a perselybe a megfelelő összeget, majd úgy döntött, hogy a perselyt most unokájának most adja át.

a) Mekkora összeget kapott Péter? (5 pont)

b) Péter nagypapája ajándékából vett néhány apróságot, de elhatározta, hogy a kapott összeg nagyobb részét 2005. január 1.-jén bankszámlára teszi. Be is tett 60000 Ft-ot évi 4%-os kamatos kamatra (a kamatok minden évben, év végén hozzáadódnak a tőkéhez). Legalább hány évig kell Péternek várnia, hogy a számláján legalább 100000 Ft legyen úgy, hogy közben nem fizet be erre a számlára? (9 pont)

13) A Robotvezérelt Elektromos Kisautók Nemzetközi Versenyén a versenyzők akkumulátorral hajtott modellekkel indulnak. A magyar versenyautó az első órában 45 kilométert tesz meg. Az akkumulátor teljesítményének csökkenése miatt az autó a második órában kevesebb utat tesz meg, mint az első órában, a harmadik órában kevesebbet, mint a másodikban, és így tovább: az indulás utáni n-edik órában megtett útja mindig 95,5%-a az $(n-1)$-edik órában megtett útjának ($n \in \mathbb{N}$ és $n > 1$).

a) Hány kilométert tesz meg a 10. órában a magyarok versenyautója? Válaszát egész kilométerre kerekítve adja meg! (4 pont)

A versenyen több kategóriában lehet indulni. Az egyik kategória versenyszabályai lehetővé teszik az akkumulátorcserét verseny közben is. A magyar csapat mérnökei kiszámították, hogy abban az órában még nem érdemes akkumulátort cserélni, amelyikben az autó legalább 20 km-t megtesz.

b) Az indulástól számítva legkorábban hányadik órában érdemes akkumulátort cserélni? (6 pont)

A „Végkimerülés” kategóriában a résztvevők azon versenyeznek, hogy akkumulátorcsere és feltöltés nélkül mekkora utat tudnak megtenni az autók. A világrekordot egy japán csapat járműve tartja 1100 km-rel.

c) Képes-e megdönteni a magyar versenyautó a világrekordot a „Végkimerülés” kategóriában? (6 pont)

14) a) Egy bank olyan hitelkonstrukciót ajánl, amelyben napi kamatlábat számolnak úgy, hogy az adott hitelre megállapított éves kamatlábat 365-tel elosztják. Egy adott évben a hitelfelvételt követően minden napra kiszámolják a napi kamat értékét, majd ezeket december 31-én összeadják, és csak ekkor tőkésítik (azaz a felvett hitel értékéhez adják). Ez a bank egy adott évben évi 8%-os kamatlábat állapított meg. Éva abban az évben a március 1-jén felvett 40 000 Ft után október 1-jén újabb 40 000 Ft hitelt vett fel. A két kölcsön felvétele után mennyi kamatot tőkésít a bank december 31-én? (A hitelfelvétel napján és az év utolsó napján is számítanak napi kamatot.) (5 pont)

b) Ádám is vett fel hiteleket ettől a banktól évi 8%-os kamatos kamatra. Az egyik év január 1-jén éppen 1 000 000 Ft tartozása volt. Több hitelt nem vett fel, és attól kezdve 10 éven keresztül minden év végén befizette az azonos összegű törlesztőrészletet. (A törlesztőrészlet összegét a bank már az éves kamattal megnövelt tartozásból vonja le.) Mekkora volt ez a törlesztőrészlet, ha Ádám a 10 befizetés után teljesen visszafizette a felvett hitelt? Válaszát ezer forintra kerekítve adja meg! (9 pont)

15) Egy 1 méter oldalú négyzetbe egy második négyzetet rajzoltunk úgy, hogy a belsőnégyzet minden csúcsa illeszkedjen a külső négyzet egy-egy oldalára. A belső és a külső négyzet oldalainak aránya 5:7.

a) Milyen arányban osztja két részre a belső négyzet csúcsa a külső négyzet oldalát? Az arány pontos értékét adja meg! (10 pont)

A belső négyzetbe egy újabb, harmadik négyzetet rajzolunk úgy, hogy a harmadik és a második négyzet oldalainak aránya is 5:7. Ezt az eljárást aztán gondolatban végtelen sokszor megismételjük.

b) Mekkora lesz a kapott négyzetek kerületeinek az összege, ha a kiindulási négyzet kerülete is tagja a (végtelen sok tagú) összegnek? (6 pont)

16) Az *ABCDEF* szabályos hatszögben a rövidebb átló hossza $5\sqrt{2}$.

a) Számolja ki a hatszög területének pontos értékét! (6 pont)

b) Az *ABCDEF* hatszög oldalfelező pontjai által meghatározott szabályos hatszög területét jelölje t_1, a t_1 területű hatszög oldalfelező pontjai által meghatározott szabályos hatszög területét t_2, és így tovább, képezve ezzel a (t_n) sorozatot. Számítsa ki a $\lim_{n\to\infty}(t_1+t_2+\ldots+t_n)$ határértékét! (Pontos értékkel számoljon!) (10 pont)

17) Kinga 10. születésnapja óta kap havi zsebpénzt a szüleitől. Az első összeget a 10. születésnapján adták a szülők, és minden hónapban 50 Ft-tal többet adnak, mint az azt megelőző hónapban. Egy bizonyos hónapban, amikor éppen 1850 Ft volt a havi zsebpénze, összeadta az addig kapott összes zsebpénzét. Az összeg 35100 Ft lett. Mennyi volt Kinga induló zsebpénze, és hány hónap telt el a 10. születésnapja óta? (12 pont)

18) Egy dolgozó az év végi prémiumként kapott 1000000 Ft-ját akarja kamatoztatni a következő nyárig, hat hónapon át. Két kedvező ajánlatot kapott. Vagy kéthavi lekötést választ kéthavi 1,7%-os kamatra, kéthavonkénti tőkésítés mellett, vagy forintot átváltja euróra, és az összeget havi 0,25%-os kamattal köti le hat hónapra, havi tőkésítés mellett.

a) Mennyi pénze lenne hat hónap után a forintszámlán az első esetben? (Az eredményt Ft-ra kerekítve adja meg!) (3 pont)

b) Ha ekkor éppen 252 forintot ért egy euró, akkor hány eurót vehetne fel hat hónap múlva a második ajánlat választása esetén? (Az eredményt két tizedesjegyre kerekítve adja meg!) (4 pont)

c) Legalább hány százalékkal kellene változnia a 252 forint/euró árfolyamnak a félév alatt, hogy a második választás legyen kedvezőbb? (Az eredményt két tizedesjegyre kerekítve adja meg!) (5 pont)

19) András edzőtáborban készül egy úszóversenyre, 20 napon át. Azt tervezte, naponta 10000 métert úszik. De az első napon a tervezettnél 10%-kal többet, a második napon pedig az előző napinál 10%-kal kevesebbet teljesített. A 3. napon ismét 10%-kal növelte előző napi adagját, a 4. napon 10%-kal kevesebbet edzett, mint az előző napon és így folytatta, páratlan sorszámú napon 10%-kal többet, pároson 10%-kal kevesebbet teljesített, mint a megelőző napon.

a) Hány métert úszott le András a 6. napon? (4 pont)

b) Hány métert úszott le összesen a 20 nap alatt? (6 pont)

c) Az edzőtáborozás 20 napjából véletlenszerűen kiválasztunk két szomszédos napot. Mekkora a valószínűsége, hogy András e két napon együttesen legalább 20000 métert teljesített? (6 pont)

20) Egy növekvő számtani sorozat első három tagjából álló adathalmaz szórásnégyzete 6.

a) Igazolja, hogy a sorozat differenciája 3-mal egyenlő! (4 pont)

András, Barbara, Cili, Dezső és Edit rokonok. Cili 3 évvel idősebb Barbaránál, Dezső 6 évvel fiatalabb Barbaránál, Edit pedig 9 évvel idősebb Cilinél. Dezső, Barbara és Edit életkora (ebben a sorrendben) egy mértani sorozat három egymást követő tagja, András, Barbara és Cili életkora (ebben a sorrendben) egy számtani sorozat három szomszédos tagja.

b) Hány éves András? (6 pont)

András, Barbara, Cili, Dezső, Edit és Feri moziba mennek.

c) Hányféleképpen foglalhatnak helyet hat egymás melletti széken úgy, hogy a három lány ne három egymás melletti széken üljön? (6 pont)

21) Állítsuk a pozitív egész számokat növekvő sorrendbe, majd bontsuk rendre 1-gyel növekvő elemszámú csoportokra, az alábbi módon kezdve:

$$(1),(2;3),(4;5;6),(7;8;9;10),...$$

a) A 100-adik csoportnak melyik szám az első eleme? (5 pont)

b) Az 1851 hányadik csoport hányadik eleme? (9 pont)

22) Éva egy 7×7-es táblázat bal felső mezőjétől kezdve, balról jobbra haladva, sorról sorra beírta egy számtani sorozat első 49 tagját úgy, hogy a tagok sorrendjét nem változtatta meg. (A sorozat 1. tagja a bal felső sarokba került, a 8. tag a második sor első mezőjébe, a 49. tag pedig a jobb alsó sarokban áll.)

		91				
				11		

a) Mennyi a táblázatba írt 49 szám összege, ha Éva a harmadik sor harmadik mezőjébe 91-et, az ötödik sor ötödik mezőjébe pedig a 11-et írta? (5 pont)

Péter a táblázat minden sorából kiválasztja a számtani sorozat egy-egy tagját úgy, hogy a hét kiválasztott szám közül semelyik kettő ne legyen egy oszlopban.

b) Igazolja, hogy akárhogyan is választja ki Péter így a számokat, a hét szám összege minden esetben ugyanannyi lesz! (6 pont)

c) Határozza meg annak a valószínűségét, hogy a 91 és a 11 is a Péter által kiválasztott számok között lesz! (5 pont)

23) Egy pénzintézet a tőle felvett H forint összegű hitel visszafizetésekor havi $p\%$-os kamattal számol $(p>0)$, ezért az adós havi törlesztőrészletét a $t_n = H\cdot\dfrac{q^n(q-1)}{q^n-1}$ képlettel számítja ki (minden hónapban ekkora összeget kell visszafizetni). A képletben $q=1+\dfrac{p}{100}$, az n pedig azt jelenti, hogy összesen hány hónapig fizetjük a törlesztőrészletet (ez a hitel futamideje).

a) Fogyasztási cikkek vásárlására 1,6 millió forint hitelt vettünk fel a pénzintézettől; a havi kamat 2%. Összesen hány forintot fizetünk vissza, ha 72 hónap alatt törlesztjük a felvett hitelt?
Válaszát ezer forintra kerekítve adja meg! (4 pont)

b) Legkevesebb hány hónapos futamidőre vehetünk fel egy 2 millió forintos hitelt, ha legfeljebb 60 ezer forintot tudunk havonta törleszteni, és a havi kamat 2%-os? (8 pont)

c) Számítsa ki a $\lim\limits_{n\to\infty} t_n$ határértékét, ha $q = 1{,}02$ és $H = 2000000$ (4 pont)

24) Egy olajkút meghibásodása miatt a tenger felületén összefüggő olajfolt keletkezett. A szakemberek műholdak segítségével 15 percenként megmérték a folyamatosan növekvő olajfolt területét, és úgy tapasztalták, hogy az minden alkalommal 2%-kal nagyobb, mint az előző érték volt.

a) Ha az első megfigyeléskor 400 m^2 volt az olajfolt kiterjedése, akkor mekkora lesz a területe egy nap múlva? (4 pont)

A sérült olajkutat végül sikerült elzárni, így az olajfolt területének növekedése megállt. Ekkor kezdték meg az olajszennyezés eltávolítását. A környezetvédelmi hatóság a 12 400 m^2 területű olajfolt megszüntetésére 31 napos határidőt szabott meg. Az első napon még csak 130 m^2-ről sikerült eltávolítani az olajfoltot (így a területe 12 270 m^2 lett), de a teljesítményt növelni tudták: az egy nap alatt megtisztított terület mérete minden nap ugyanakkora értékkel nőtt.

b) Mekkora ez a napi növekedés, ha pontosan az előírt határidőre sikerült a 12 400 m^2-es olajfolt teljes eltávolítása? (6 pont)

25) a) Egy számtani sorozat differenciája 1,6. A sorozat első, harmadik és hetedik tagját (az adott sorrendben) tekinthetjük egy mértani sorozat első három tagjának is. Határozza meg ezt a három számot! (6 pont)

Tekintsük a következő állítást: *Ha az $\{a_n\}$ számsorozat konvergens, akkor az $\{a_n\}$ sorozat értékkészlete véges számhalmaz.* (Véges halmaz: elemeinek száma megadható egy természetes számmal.)

b) Döntse el, hogy az állítás igaz vagy hamis! Válaszát indokolja! (3 pont)

c) Fogalmazza meg az állítás megfordítását, és döntse el a megfordított állításról, hogy igaz vagy hamis! Válaszát indokolja! (4 pont)

26) Az iskolai karácsonyi vásárra készülődve Blanka, Csenge és Dóri feladata az volt, hogy különböző figurákat hajtogassanak színes papírból. Összesen 70 figurát hajtogattak. A figurák kétheted részét Dóri készítette, a maradékot pedig fele-fele arányban Blanka és Csenge.

a) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy a 70 figura közül véletlenszerűen kiválasztott két figurát ugyanaz a lány készítette! (6 pont)

A Blanka által készített figurák 40%-a volt karácsonyfa, a Csenge által készített figuráknak 60%-a, a Dóri által készített figuráknak pedig 30%-a.
Az első vásárló a vásáron Blanka édesanyja volt; ő megvett egy véletlenszerűen kiválasztott karácsonyfa-figurát.

b) Határozza meg annak a valószínűségét, hogy a figurát éppen Blanka készítette! (3 pont)

A gyerekek másfajta díszeket is készítettek úgy, hogy színes kartonlapra nyomtatott kör alakú képeket négy-négy egyenes vágással vágtak körül. Az egyik ilyen módon kapott érintőnégyszög alakú függődísz oldalainak hossza (valamilyen sorrendben) egy számtani sorozat négy szomszédos tagja. A négyszög egyik oldala 23 cm, a kerülete pedig 80 cm.

c) Mekkora lehet a négyszög másik három oldalának hossza? (7 pont)

27) a) Egy mértani sorozat hányadosa $\frac{1}{4}$, a sorozat első öt tagjának összege 852,5. Határozza meg a sorozat első tagját! Számításai során ne használjon közelítő értéket! (4 pont)

b) Egy számtani sorozat első öt tagjának összege 852,5; első tíz tagjának összege pedig 2330. Számítsa ki a sorozat első tagját és differenciáját! (7 pont)

28) a) Egy mértani sorozat negyedik tagja 12, a kilencedik tagja 384. Számítsa ki a sorozat első hat tagjának az átlagát, és az átlagtól mért átlagos abszolút eltérését! (6 pont)

b) Hány olyan pozitív szám van, amelynek összege és szorzata is 12? (7 pont)

29)

a) Igazolja, hogy nincs olyan 2-nél nagyobb n egész szám, melyre $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{2}$, és $\binom{n}{3}$ (ebben a sorrendben) egy mértani sorozat egymást követő tagjai! (7 pont)

b) Határozza meg azokat az 5-nél nagyobb n egész számokat, melyekre $\binom{n}{4}$, $\binom{n}{5}$, és $\binom{n}{6}$ (ebben a sorrendben) egy számtani sorozat egymást követő tagjai! (9 pont)

30) Egy négyzet alapú egyenes hasáb alapéle 18 egység, testátlója $36\cdot\sqrt{2}$ egység.

a) Mekkora szöget zár be a testátló az alaplap síkjával? (4 pont)

b) Hány területegység a hasáb felszíne? (A felszín mérőszámát egy tizedesjegyre kerekítve adja meg!) (3 pont)

c) Az alapél és a testátló hosszát – ebben a sorrendben - tekintsük egy mértani sorozat első és negyedik tagjának! Igazolja, hogy az alaplap átlójának hossza ennek a sorozatnak a második tagja! (4 pont)

31) Az $\{a_n\}$ számtani sorozat első és harmadik tagjának összege 26, a második és negyedik tagjának az összege pedig 130.

a) Adja meg a sorozat ötödik tagját! (5 pont)

A $\{b_n\}$ mértani sorozat első és harmadik tagjának összege 26, második és negyedik tagjának összege pedig 130.

b) Adja meg a sorozat ötödik tagját! (6 pont)

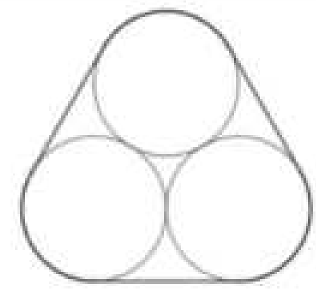
32) Ha András az asztalra ejti a pingponglabdáját, akkor a labda az ejtési magasság kb. 84%-ára pattan vissza. Ezután tovább pattog úgy, hogy minden asztalra érkezés után az előző felpattanás magasságának 84%-áig emelkedik fel.

a) András egy alkalommal (az asztal lapjától mérve) 1 méter magasságból ejtette az asztalra a pingponglabdát. Mekkora utat tesz meg összesen a pingponglabda az első asztalra érkezésétől a tizenötödikig? (Feltételezzük, hogy a labda csak függőleges irányban mozog, a vízszintes irányú elmozdulás elhanyagolható.) (4 pont)

András azt állítja, hogy az összes pingponglabdájának száma 6-tal osztva 2 maradékot, 15-tel osztva pedig 1 maradékot ad.

b) Mutassa meg, hogy András állítása hamis! (3 pont)

Dóri olyan pingponglabda-készletet vásárolt, amelynek dobozába három egyforma labda – az ábrán látható elrendezésben – szorosan belefér. A doboz hengeres test, melynek alaplapját három egybevágó körív és három egyenlő hosszúságú szakasz határolja. (Az ábrán a dobozt felülnézetből látjuk.)



c) A doboz térfogatának hány százalékát tölti ki a három pingponglabda, ha a labdák átmérője 40 mm? (A doboz falvastagsága elhanyagolható.) (7 pont)

33) Egyes kutatók szerint a városokban az influenzával fertőzött betegek száma a $B(t)=\dfrac{L}{1+\left(\dfrac{L}{B_0}-1\right)\cdot 0,75^t}$ formula szerint alakul. A képletben t az influenzajárvány kezdetétől eltelt idő napokban kifejezve $(0\le t\le 30)$, L a város lakosainak száma, B_0 pedig a járvány kezdetekor a fertőzött betegek száma a városban $(0<B_0<L)$.

Egy nagyvárosban $L=1,5$ millió, $B_0=1000$.

a) A modell szerint hány fertőzött betegre lehet számítani ebben a városban a járvány kezdete után 5 nappal? (3 pont)

b) Hány nap múlva lesz a város lakosainak 10%-a fertőzött beteg a modell szerint? (6 pont)

c) Igazolja, hogy ha L és K adott pozitív számok, $n\in\mathbb{N}^+$, akkor a $b_n=\dfrac{L}{1+K\cdot 0,75^n}$ képlettel megadott sorozat korlátos, szigorúan monoton növekedő, és $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=L$. (7 pont)

34) Van egy részvénycsomagunk, amely 6600 Ft-os és 4800 Ft-os névértékű részvényeket tartalmaz. A részvényeink névértékének összege 131400 Ft.
Ha a 4800 Ft-os névértékű részvényeink harmadát 6600 Ft-osra cserélnénk, akkor a névértékek összege 140400 Ft-ra növekedne.

a) Hány darab részvényünk van az egyes fajtákból? (9 pont)

Van két, most induló hosszú távú befektetésünk is. Az egyiknél 500000 forint a befektetett összeg, amely havi 1%-os kamatos kamattal növekszik. A másik – magasabb hozamú, de kockázatosabb – üzletbe 450000 forintot fektettünk; ez az összeg havi 1,3%-os kamatos kamattal növekszik.

b) Hányadik hónap végén lesz először több pénz a második befektetésünkben, ha a kamatfeltételek közben nem változnak? (6 pont)

35) Tekintsük az (a_n) sorozatot: $a_1=\binom{2}{2}=1$, $a_2=\binom{3}{2}=3$, $a_3=\binom{4}{2}=6$ és így tovább, $a_n=\binom{n+1}{2}\left(n\in\mathbb{N}^+\right)$.

a) Számítsa ki az (a_n) sorozat első öt tagjából álló számsokaság átlagát és szórását! (4 pont)

b) A fenti (a_n) sorozatból képezzük a (b_n) sorozatot: $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

Mennyi a (b_n) sorozat határértéke? (4 pont)

A (c_n) számtani sorozat differenciája 0,25. A sorozat első n tagjának összege 100, első $2n$ tagjának összege 300 $\left(n \in \mathbb{N}^+\right)$.

c) Határozza meg n értékét! (8 pont)